

Pomocí těchto analogických veličin můžeme přepsat kteroukoliv rovnici mechanického oscilátoru na odpovídající rovnici pro elektromagnetický oscilátor. Pro mechanický oscilátor z 2. Newtonova pohybového zákona vyplývá

$$ma = -ky \quad \text{čili} \quad a + \frac{k}{m}y = 0.$$

Analogická rovnice elektromagnetického oscilátoru odpovídá 2. Kirchhoffovu zákonu (viz čl. R2-4) pro oscilační obvod bez tlumení

$$\frac{q}{C} = -L \frac{\Delta i}{\Delta t} \quad \text{čili} \quad \frac{\Delta i}{\Delta t} + \frac{1}{LC}q = 0.$$

Poněvadž $k/m = \omega_0^2$ a podobně $1/LC = \omega_0^2$, můžeme psát

$$a + \omega_0^2 y = 0, \\ \frac{\Delta i}{\Delta t} + \omega_0^2 q = 0.$$

Analogické vztahy pro periodu vlastního kmitání obou oscilátorů jsou

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{a} \quad T_0 = 2\pi\sqrt{LC}.$$

R7.3 Tlumené kmitání oscilačního obvodu

Při výkladu kmitání oscilačního obvodu (čl. 7.7) bylo uvedeno, že vlastní kmitání reálného oscilačního obvodu je vždy tlumené. To znamená, že amplituda kmitů se postupně zmenšuje, až kmitání zanikne. Hlavní příčinou tlumení je odpor R oscilačního obvodu, ve kterém se energie elektromagnetického kmitání mění na teplo. Na tomto odporu je napětí $u_R = Ri$, takže 2. Kirchhoffův zákon pro oscilační obvod můžeme zapsat ve tvaru

$$Ri + \frac{q}{C} = -L \frac{\Delta i}{\Delta t}.$$

Po úpravě dostaneme rovnici tlumeného kmitání oscilačního obvodu

$$\frac{\Delta i}{\Delta t} + \frac{R}{L}i + \frac{q}{LC} = 0. \quad (1)$$

Model kmitání tlumeného oscilačního obvodu

Na základě rovnice tlumeného kmitání oscilačního obvodu vytvoříme model, který nám umožní zobrazit časový diagram kmitání obvodu pomocí počítače.

Z rovnice (1) určíme zvětšení proudu Δi za malý časový interval Δt (nazýváme ho *časový krok*)

$$\Delta i = -\frac{Ri + \frac{q}{C}}{L} \Delta t.$$

V počátečním okamžiku $t_0 = 0$ je na kondenzátoru napětí $u_{C0} = q_0/C$ a proud v obvodu $i_0 = 0$. O časový krok později, tzn. v čase

$$t_1 = t_0 + \Delta t$$

bude náboj kondenzátoru

$$q_1 = q + i \Delta t$$

a proud v obvodu

$$i_1 = i + \Delta i.$$

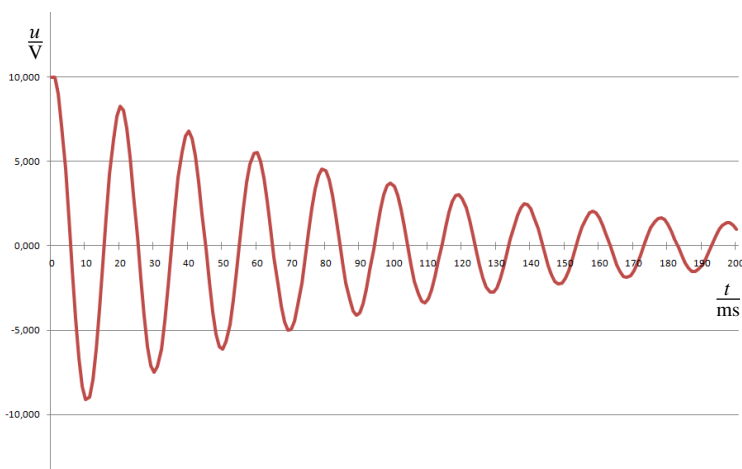
Když budeme tento výpočet opakovat s hodnotami získanými v předcházejícím kroku, tak získáme řadu dat a pro každý časový krok určíme napětí kondenzátoru $u_C = q/C$. Napětí zobrazíme jako časový diagram kmitání oscilačního obvodu.

Poznámka: Pro uvedený postup výpočtu existují počítačové programy, do nichž se vloží počáteční hodnoty sledovaných veličin, v našem případě napětí (popř. náboje) a proudu, hodnoty parametrů R , L a C a zvolí se časový krok. Čím menší bude jeho velikost, tím přesnější bude výpočet. Model si ověříme na příkladu oscilačního obvodu s parametry $R = 20 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$ a $C = 10 \mu\text{F}$. Kondenzátor má v počátečním okamžiku napětí $u_{C0} = 10 \text{ V}$ a proud v obvodu $i_0 = 0$. V nejjednodušším případě můžeme k výpočtu použít tabulkový procesor (např. Excel), jehož buňky vyplníme podle tabulky R7-2. Výpočet s časovým krokem $\Delta t = 0,001 \text{ s}$ je proveden pro celkovou dobu $0,2 \text{ s}$ (obr. R7-8).

Tabulka R7-2

	t	u_C	Δi	i	R	L	C	Δt
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	0	10	0		20	1	0,00001	0,001
2	=A1+\$H\$1	=B1+(D1*\$H\$1/\$G\$1)	=-((B2+\$E\$1*D1)/\$F\$1)*\$H\$1	=D1+C2				
3	=A2+\$H\$1	=B2+(D2*\$H\$1/\$G\$1)	=-((B3+\$E\$1*D2)/\$F\$1)*\$H\$1	=D2+C3				
4	...	...	...	...				

Tlumení kmitů oscilačního obvodu ovlivňuje také úhlovou frekvenci ω vlastního kmitání tlumeného oscilátoru, která je menší než úhlová frekvence



R7-8 Časový diagram kmitání tlumeného oscilačního obvodu

ω_0 netlumeného oscilátoru ($\omega < \omega_0$). Z teorie kmitání vyplývá obecně platný vztah (platí i pro mechanický oscilátor)

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2},$$

kde δ je *součinitel tlumení*

$$\delta = \frac{1}{2} \frac{R}{L}.$$

Podle velikosti součinitele tlumení mohou nastat tři typické případy:

1. $\omega_0^2 > \delta^2$ – *periodický děj*; oscilační obvod kmitá s frekvencí

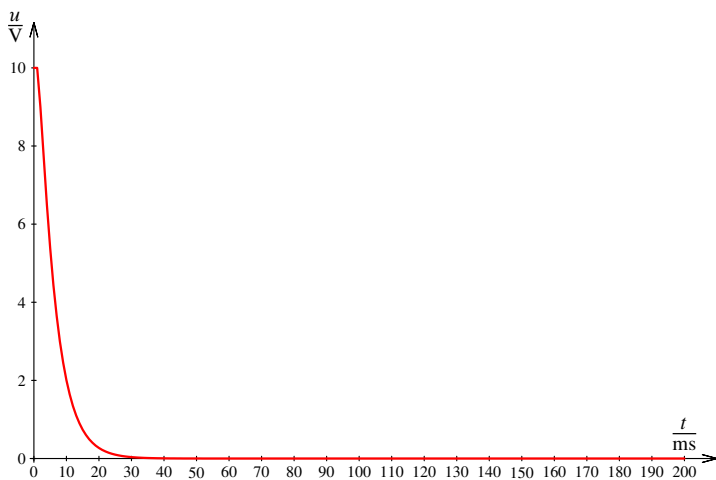
$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

2. $\omega_0^2 < \delta^2$ – *aperiodický děj*; kmitání vůbec nevznikne, kondenzátor se vybije a jeho nové nabití již nenastane.

3. $\omega_0^2 = \delta^2$ – *kritické tlumení*; mezní stav oscilátoru, při němž aperiodický děj proběhne v nejkratší době. V našem modelu tento případ nastane při odporu

$$R = \sqrt{\frac{4L}{C}} \doteq 632 \, \Omega.$$

Časový diagram kritického tlumení oscilačního obvodu je na obr. R7-9.



R7-9 Časový diagram kritického tlumení oscilačního obvodu

Poznámka: Zavedením součinitele tlumení můžeme upravit rovnici (1) do obecně platného tvaru

$$\frac{\Delta i}{\Delta t} + 2\delta i + \omega_0^2 q = 0.$$

Tato rovnice má pro případ $\Delta t \rightarrow 0$ řešení, z něhož vyplývá, že amplituda kmitů se zmenšuje podle exponenciální funkce a pro okamžité napětí kondenzátoru platí vztah

$$u = U_0 e^{-\delta t} \cos \omega t, \quad (2)$$

kde U_0 je napětí kondenzátoru v počátečním okamžiku.

Úlohy

- 1** Určete periodu vlastního kmitání netlumeného a tlumeného kmitání v oscilačním obvodu v popsaném modelu.
- 2** Zobrazte pomocí modelu netlumené kmitání oscilačního obvodu ($R = 0$).
- 3** V tabulce kmitání oscilačního obvodu při kritickém tlumení najděte okamžik, kdy kmitání v obvodu zaniklo.
- 4** Ověřte si výpočtem pomocí počítačového programu, že rovnice (2) vede ke stejnému výsledku jako rovnice (1).